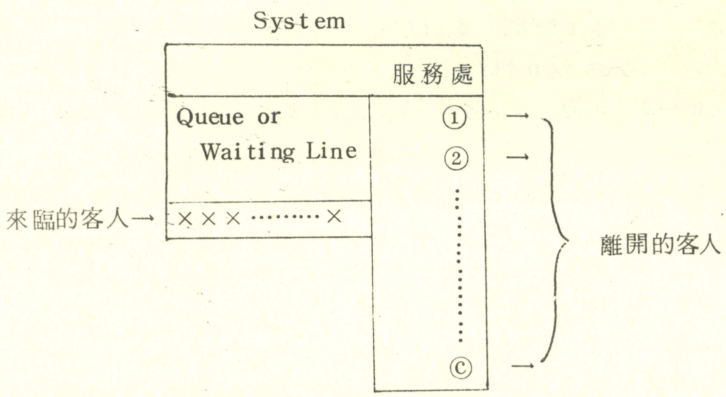
北醫學報 第九卷 1978年十月
P151-162

Queueing System（排隊系統）的問題

陳玄德

在實習醫院病人排隊等着看病，在銀行內客人等着寄錢或領錢等，這時候如何設置服務單位或窗口的數目才能順利來服務，才不會使病人或客人等着太久。如服務單位太多所化費用等於浪費，如服務單位過少，客人可能等的不耐煩。說不定移到別的地方去。像這種須要調整排列，Waiting Line（Queue）與服務站的問題叫做Queueing System 的問題。在此種服務系統裡的客人數目等於排隊着人數加在受服務中的人數。

以圖形說明如下：



本小册所參考書本如下 1. Cox, D.R. and W.L. Smith; Queues.
2. Elmaghraby, S. E; The Design of Production System.
3. Saaty, J., Elements of Queueing Theory.

本小册可在數學系應用數學組，商用數學科裡"作業研究"課內當做一章"Queueing Theory"的教材來使用。本來定理的證明可應用數學歸納法，Z變換，微分方程式，差分方程式，復變數之理論等，在此採用比較簡單的方式。

Poisson Queues之應用

(一)先設定Poisson Process〔在某空間或時間內，某事件會發生的課程〕應具備的條件。

公理(1)，在時距（o，t）內，$N(t)$ 代表來去人數，設 $h>0$，對 $t_0<t_1<\cdots\cdots<t_K$，二個隨機變數 $\{N(t_{i+1})-N(t_i)\}$ 與 $\{N(t_{i+1}+h)-N(t_i+h)\}$，$i=0, 1, \cdots\cdots, k-1$，互爲獨立並且持相等分配狀態。

公理(2)，對任何 $h>0$ 的時距，$0<P\{N(h)=1\}<1$，$P\{N(h)=1\}$

表示一個人出現的機率。

公理(3)，在充分小的時距內，最多只能$N(h)=1$，就是$P\{N(h)\geq 2\}=0$

(二)來人(客人)的分配(出生問題)

假設每單位時間內來人的比率是$\lambda>0$，有時候此問題叫做出生問題。假設$t=0$時沒有人在，則$N(t=0)=0$。由上述公理可知$P\{N(h)=1\}=\lambda h+0(h^2)$，$0(h^2)$是高次無限小表示由種種原因可能影響的很小的機率。又可知$P\{N(h)=0\}\doteqdot 1-\lambda h$，但$0<1-\lambda h<1$，設在時間$t$及$t+h$時$n$個來人的機率各爲$p_n(t)$及$p_n(t+h)$在所考慮的系統內，有$n$個來人或0人的情況如下。

由此可知 $p_n(t+h)=p_n(t)(1-\lambda h)+p_{n-1}(t)\lambda h,\quad n>0$

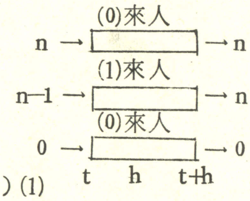
$p_0(t+h)=p_0(t)(1-\lambda h),\qquad n=0$

整理後得知 $p_n(t+h)-p_n(t)/h$

$=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t),$

$p_0(t+h)-p_0(t)/h$

$=-\lambda p_0(t),$



取 $h\to 0$，可得 $p'_n(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)$ (1)

$p'_0(t)=-\lambda p_0(t)$ (2)

△Z變換；設n=正整數，p_n=機率密度函數(n的函數)

$Z(p_n)=P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n z^n$，對$|z|<1$收歛，叫做$p_n$的Z變換。

設 $p^{(n)}(z)=\dfrac{\partial^n p(z)}{\partial z^n}$

定律 (1) $P(0)=p_0$， (2) $P(1)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n=1$， (3) $p_n=1/n!\,P^n(0)$，

(4) $E\{n\}$=n的平均值$=P^{(1)}(1)$，$V(n)$=n 的分散值$=P^{(2)}(1)+P^{(1)}(1)-\{P^{(1)}(1)\}^2$，

(5) $Z(p_{n-1})=ZP(z)$， (6) $Z(p_{n+1})=1/z\,[P(z)-p_0]$，

(7) $Z[p_n+q_n]=P(z)+Q(z)$， (8) $Z(bp_n)=bP(z)$，

(9) $y_n=q_n^* p_n=q_0p_1+q_1p_{n-1}+\cdots\cdots+q_{n-1}p_1+q_np_0$

$Z(y_n)=Z(q_n)Z(p_n)=Q(z)P(z)$ 叫做p_n與q_n的convolution的Z變換。

變換表 $P(z)=\sum_{n=0}p_nz^n$，$Z^{-1}\{P(z)\}=p_n$

(1) $Z^KQ(z)$，$p_n=\begin{cases}0, & n<k\\ q_{n-K}, & n>k\end{cases}$

(2) $Z^{-K}Q(z)-\sum_{j=0}^{K-1}q_j\,Z^{j-K}$， q_{n+K}

(3) $Q(a^bz)$， $a^{bn}q_n$

(4) $\{(1-z)Q(z)-q_0\}z^{-1}$， $q_{n+1}-q_n$

(5) $a/1-z$， a

(6) $z/(1-z)^2$， n

(7) $1/(1-az)$， a^n

(8) $1/(1-az)^{K+1}$,　　$\binom{n+k}{k}a^n$

(9) $(a+bz)^m$,　　$\binom{m}{n}b^n a^{m-n}$

(10) $-L_n(1-az)$,　　a^n/n

(11) e^{az} ,　　$a^n/n!$

(12) a^z ,　　$(L_n a)^n/n!$

繼(二)，由上述Z變換可解微分方程式(1)，(2)如下。

先求(1)的Z變換，得 $\sum_{n=1}^{\infty} p'_n(t)z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda p_n(t)z^n + \sum_{n=1} \lambda p_{n-1}(t)z^n$

加上　$p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$

得 $\sum_{n=0}^{\infty} p'_n(t)z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda p_n(t)z^n + \lambda z \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t)z^{n-1}$

設　$P(z,t) = \sum_{n=0} p_n(t)z^n$ ，因此 $P'(z,t) = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p'_n(t)z^n$

$\therefore$　$P'(z,t) = -\lambda P(z,t) + \lambda z P(z,t)$

或　$dP(z,t)/P(z,t) = \lambda(z-1)dt$

$\therefore$　$P(z,t) = Be^{\lambda(z-1)t}$, $B = P(z,0) = p_0(0) = 1$ 。

$P(z,t) = e^{\lambda(z-1)t}$ ，由反Z變換，公式(11)，

$Z^{-1}\{P(z,t)\} = Z^{-1}\{e^{\lambda(z-1)t}\} = e^{-\lambda t-1}z\{e^{\lambda tz}\}$,

$\therefore$　$p_n(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$,　$n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

此表示，平均 $=\lambda t$ ，分散 $=\lambda t$ 的Poisson 分配。

(三)設二個來人間的時間叫做隔間時間，來人分配由上述是Poisson分配。

$f(t)$ 是 $(t>0)$ 隔間時間 t 的p.d.f. $\therefore F(t) = \int_0^t f(u)du$,

在 $(0, t)$ 時間內沒有來人的機率 $p_0(t) = \int_t^{\infty} f(u)du$

$= 1 - \int_0^t f(u)du = 1 - F(u)$,

由上述　$p_0(t) = e^{-\lambda t}$, $\therefore e^{-\lambda t} = 1 - F(t)$,

$\therefore$　$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$

其平均 $=\frac{1}{\lambda}$，分散 $=1/\lambda^2$，叫做指數分配。其重要特色如下。

(A)在任何時間，下一個來人會到的時間是獨立的。

$P\{t>T+S/t>S\} = P\{t>T+S, t>S\}/P\{t>S\}$

$= P(t>T+S)/P(t>S) = e^{-\lambda(T+S)}/e^{-\lambda S} = e^{-\lambda T} = P(t>T)$

此現象叫做無記憶性。

(四)去人（完成服務離開的人）的分配問題（死亡問題）

假設在 $t=0$ ，此系統內有N個來人。每單位時間客人會離開的比率是 $\mu>0$ 。故，無人離開的機率 $=1-\mu h$（在 $h>0$ 時距內）。

$\therefore$　$p_N(t+h) = p_N(t)(1-\mu t)$,　　$n = N$

$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\mu h) + p_{n+1}(t)\mu h$,　　$0<n<N$

$p_0(t+h) = p_0(t)\cdot 1 + p_1(t)\mu h$,　　$n = 0$

整理後取 $h>0$，得 $\begin{cases} p'_N(t)=-\mu p_N(t) & n=N \\ p'_n(t)=-\mu p_n(t)+\mu p_{n+1}(t) & 0<n<N \\ p'_0(t)=\mu p_1(t) & n=0 \end{cases}$

因Z變換比較困難，由數學歸納法，在 $n=N$，$p'_N(t)=-\mu p_N(t)$

可得 $p_N(t)=Be^{-\mu t}$，代入原始條件 $p_N(0)=1$，得 $B=1$。

$\therefore p_N(t)=e^{-\mu t}$，討 $0<n<N$，設 $n=N-1$，

$p'_{N-1}(t)=-\mu p_{N-1}(t)+\mu p_N(t)=-\mu p_{N-1}(t)+\mu e^{-\mu t}$，

解此線型一階微分方程式，得 $p_{N-1}(t)=e^{-\mu t}(\int \mu e^{-\mu t}e^{\mu t}dt+B)$，

$\because p_{N-1}(0)=0$，$B=0$，$\therefore p_{N-1}(t)=\mu te^{-\mu t}$ 同理對 $n=N-2$，

$p'_{N-2}(t)+\mu p_{N-2}(t)=\mu^2te^{-\mu t}$，再解此微分方程式，得 $p_{N-2}(t)=e^{-\mu t}(\mu t)^2/2!$，

一般，可得 $p_{N-j}(t)=e^{-\mu t}(\mu t)^j/j!$，$j=0,1,\cdots\cdots,N-1$。

代入 $N-j=n$ 得 $p_n(t)=(\mu t)^{N-n}e^{-\mu t}/(N-n)!$ $n=1,2,\cdots\cdots,N$。

又對 $n=0$，$p'_0(t)=\mu p_1(t)=\mu\cdot(\mu t)^{N-1}e^{-\mu t}/(N-1)!$

由部分求積法

$$\begin{aligned} p_0(t) &= -(\mu t)^{N-1}e^{-\mu t}/(N-1)!+\mu\int(\mu t)^{N-2}e^{-\mu t}/(N-2)!dt \\ &= -(\mu t)^{N-1}e^{-\mu t}/(N-1)!-(\mu t)^{N-2}e^{-\mu t}/(N-2)!+ \\ &\quad \mu\int(\mu t)^{N-3}e^{-\mu t}/(N-3)!dt+\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\mu\int\mu t\,e^{-\mu t}dt \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\mu te^{-\mu t}+\mu\int e^{-\mu t}dt \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots-\mu te^{-\mu t}-e^{-\mu t}+C \end{aligned}$$

，代入 $t=0$，

得 $C=1$，$\because p_0(o)=1$

$$\therefore p_0(t)=1-\sum_{n=1}^{N}(\mu t)^{N-n}e^{-\mu t}/(N-n)!=1-\sum_{n=1}^{N}p_n(t)$$

由 $\sum_{n=0}^{N}p_n(t)=1$ 也可知此結論。

㈤服務時間的分配，設 $g(t)$ 是服務時間 t 的 p.d.f.由㈣假設要離開的人其分配是Poisson型。在時距 $(0,T)$ 內沒有服務任何人的機率等於 $(0,T)$ 內沒有要離開的人的機率。就是P｛服務時間 $t>T$｝＝P｛T時間內沒有人離開｝，換句話說，

$$1-\int_0^T g(t)dt=P_N(T)=e^{-\mu T}\ (\text{由㈣})，$$

$$\int_0^T g(t)dt=1-e^{-\mu T}$$

$\therefore\ g(t)=\begin{cases}\mu e^{-\mu t}, & t>0, \\ 0, & t\le 0,\end{cases}$ 平均 $=\dfrac{1}{\mu}$，分散 $=\dfrac{1}{\mu^2}$ 的指數分配。

㈥結論，由㈠～㈤綜合如下，

在已知㈠的公理下，證明到①來人的分配是Poisson型，②隔間時間是指數分配，③服務時間是指數分配，④離開人的分配是Poisson型。以上所述是Poisson型Queues的分配。

下面要討論許多特別情形的Poisson型Queues的問題。

(六)出生與死亡問題；此問題是綜合前述出生問題與死亡問題得來的。

在本題，可說是一種先到先服務狀態，只有一個服務站，來人行列與人的來源是無限制的。對各種情形分析如下。

(1) P〔在時間 t 有 n 人並且在 $h>0$ 裡無人來，同時無人離開〕

$= p_n(t)(1-\lambda h)(1-\mu h)$

(2) P〔在時間 t 有 n 人並且在 $h>0$ 裡一個來人又一個離開〕

$= p_n(t)(\lambda h)(\mu h)$

(3) P〔在時間 t 有 (n−1) 人，並且在 $h>0$ 裡一個來人又無人離開〕

$= p_{n-1}(t)(\lambda h)(1-\mu h)$

(4) P〔在時間 t 有 (n+1) 人，並且在 $h>0$ 裡無人來又一個人離開〕

$= p_{n+1}(t)(1-\lambda h)(\mu h)$

上述四式相加除去 h^2 等高次無限小，可得

$$p_n(t+h)=p_n(t)\{1-\lambda h-\mu h\}+p_{n+1}(t)(\lambda h)+p_{n+1}(\mu h),$$

同理對 $n=0$，$p_0(t+h)=p_0(t)\{(1-\lambda h)\cdot 1\}+p_1(t)(\mu h)(1-\lambda h)$

$$=p_0(t)(1-\lambda h)+p_1(t)(\mu h),$$

當 $h\to 0$ 時得 $p'_n(t)=\lambda p_{n-1}(t)+\mu p_{n+1}(t)-(\lambda+\mu)p_n(t)$，$n>0$

$p'_0(t)=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)$，　$n=0$

設 $\rho=\lambda/\mu<1$，當 $n\to\infty$ 時 $p'_n(t)\to 0$ 並且 $p_n(t)\to p_n$，穩定狀態，

$n=0,1,2,\cdots\cdots$

故，可知 $-\lambda p_0+\mu p_1=0$，　$n=0$

$\lambda p_{n-1}+\mu p_{n+1}-(\lambda+\mu)p_n=0$，　$n>0$

$\therefore\ (\rho+1)p_n=\rho p_{n-1}+p_{n+1}$，　$n>0$

$(\rho+1)p_0=p_0+p_1$，　$n=0$

由前述 Z 變換，二方程式可變做

$$(\rho+1)P(z)=\rho zP(z)+\frac{1}{z}P(z)+\left(\frac{z-1}{z}\right)p_0$$

$$P(z)=\left\{\frac{z}{(z-1)-\varphi z(z-1)}\right\}\left(\frac{z-1}{z}\right)p_0=\left\{\frac{1}{1-\rho z}\right\}p_0$$

由表第 8 公式

$$Z^{-1}\{P(z)\}=p_0Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\rho z}\right\}=p_0\rho^n,$$

$\therefore\ \boxed{p_n=p_0\rho^n}$　$n=0,1,2\cdots\cdots$

由 $\sum_{n=0}^{\infty}p_n=1$，$1=p_0\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n=p_0\frac{1}{1-\rho}$，$\therefore\ p_0=(1-\rho)$

〔$\sum_{n=0}^{\infty}p_n=1$ 之收斂由 $\rho<1$ 很明顯〕，$\therefore\ \boxed{p_n=(1-\rho)\rho^n}$ $n=0,1,2\cdots$

此關係式在表示〔幾何型分配狀態，P〔$x=j$〕$=pq^{j-1}$，$j=1,2,\cdots$
$E(x)=1/p$，$V(x)=q/p^2$〕故很快就知道 $E\{n\}=\rho/1-\rho$，$V(n)=\rho/(1-\rho)^2$，另外可由 Z 變換求證如下，

$P(z)=\{1/1-\rho z\}p_0$，$E\{n\}=P'_{(1)}=p_0\{\rho/(1-\rho z)^2\}_{z=1}=\rho p_0/(1-\rho)^2$，$\because\ p_0=1-\rho$，$\therefore\ E\{n\}=\rho/1-\rho$，或寫做 L_s（在此系統內的客人的平均數）$=E\{n\}=\rho/1-\rho$。同時可知，在此

Queue內的客人的平均數 $L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = (\rho/1-\rho)-\rho = \rho^2/1-\rho$ 。又在此系統內對每個客人所化的等待時間 $W_s = L_s/\lambda = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} = 1/\mu(1-\rho)$，同樣，在此等待行列內對每個客人所化的等待時間 $W_q = L_q/\lambda = \rho/\mu(1-\rho)$

（注意），吾人在求 p_n 時無限制任何服務規則。

(七)在先到先服務的條件下，等待時間的分配問題。

設 τ 是在此系統內剛到客人所要化的時間，則 $\tau = t'_1 + t_2 + t_3 + \cdots\cdots + t_n + t_{n+1}$，$t'_1$ 是正在受服務客人要完成服務的時間，t_2，t_3，……，t_n 各別是正在Queue裡的（n−1）客人所須要的服務時間，t_{n+1} 是剛到客人的服務時間。

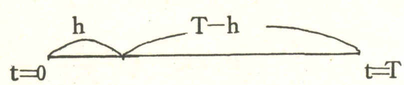
設 $W(\tau/n+1)$ 是表示 τ 的條件機率，在已經有 n 個客人的條件下。

可假設 t_1^1，t_2，……，t_n，t_{n+1} 屬於同樣的指數分配狀態。此表示 τ 是同一獨立指數分配的和。由指數分配的加法性，可知 $W(\tau/n+1)$ 是參數（μ，n+1）的Gamma 分配。∴其 p.d.f $= f_n(s) = \mu^n S^{n-1} e^{-\mu s}/(n-1)!$（$S>0$，參數 μ，n）。又 $\lambda/\mu=\rho$，故 $W(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} W(\tau/n+1)p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\mu\tau)^n e^{-\mu\tau}/n!\ (1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\mu e^{-\mu\tau} \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\tau)^n/n! = (1-\rho)\mu e^{-\mu\tau}e^{\lambda\tau} = \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\varphi)\tau}$，$\tau>0$，此關係式同樣表示指數分配。$\tau$ 之平均 $E\{\tau\} = 1/\mu(1-\rho) = W_s$ ＝在此系統內的平均等待時間。

(八)′ 假設Poisson型來人，Poisson型離開人，一個服務站，等待行列內的最大人數無限制，在隨機服務的條件下，與(六)比較，可知(六)與(七) 的 $p_n = (1-\rho)\rho^n$ 相同，因此 L_s 不會相異。進一步可知 $W_s = L_s/\lambda = 1/\mu(1-\rho)$。其證明可如下求得。

設，$R(T/n) = P\{\xi > T \mid$ 在 $t=0$ 時等待行列中有 n 個人$\}$。就是，等待行列中有 n 個人的條件下剛到的特別一個人等待時間 ξ 超過 T 的情形。ξ 表示在行列中的等待時間的隨機變數。

在很短時間 $h>0$ 後，特別一個人連結此等待行列的情形如下。



(1)多一個來人的機率 $= \lambda h$，特別一個人再等待 $T-h$ 的機率 $= R(T-h/n+1)$

故上述情形會發生的機率 $= (\lambda h)R(T-h/n+1)$

(2)一個客人完成服務的機率 $= \mu h$，其他客人的任何一人開始受服務的機率 $= n/n+1$，並且特別的一人只少等 $(T-h)$ 的機率 $= R(T-h/n-1)$。

故上述事件發生的機率 $= (\mu h)(n/n+1)R(T-h/n-1)$

(3)無人來並且無人受服務的機率 $= \{1-(\lambda+\mu)h\}$，並且特別的客人至少等 $(T-h)$ 的機率 $= R(T-h/n)$，故上述事件發生的機率 $= \{1-(\lambda+\mu)h\} R(T-h/n)$。以上綜合之，吾人得

$$\begin{cases} R(T/n) = (\lambda h)R(T-h/n+1) + (n/n+1)(\mu h)R(T-h/n-1) + \{1-(\lambda+\mu)h\}R(T-h/n), & n>0 \\ R(T/o) = (\lambda h)R(T-h/1) + \{1-(\lambda+\mu)h\}R(T-h/o), & n=0 \end{cases}$$

整頓後，求差商，然後使 $h\to 0$，得

$$\begin{cases} R'(T/n)=(n/n+1)\mu R(T/n-1)+\lambda R(T/n+1)-(\lambda+\mu)R(T/n), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n>0 \\ R'(T/o)=\lambda R(T/1)-(\lambda+\mu)R(T/o) \quad , \quad n=0 \end{cases}$$

假設R(T)是代表某特別的客人在行列中至少等T時間(服務開始前)的(絕對)機率。 $\therefore R(T)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}R(T/n)$,在等待行列中已經有n個人的事件等於系列中有(n+1) 個人的現象,代入 $p_{n+1}=(1-\rho)\rho^{n+1}$ 故 $R(T)=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n+1}R(T/n)$,又在等待行列中的平均等待時間

$$W_q=\int_0^\infty R(T)\,dT=\int_0^\infty(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n+1}R(T/n)\,dt$$

$$=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n+1}\int_0^\infty R(T/n)\,dT \quad 。※$$

上述微分方程式兩邊乘 $(n+1)/\mu\rho^{n+1}$,然後由 $n=0$ 至∞相加,得

$$1/\mu\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^{n+1}R'(T/n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^{n+1}R(T/n-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n+2}(n+1)$$

$$R(T/n+1)-(1+\rho)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^{n+1}$$

$$R(T/n)$$

兩邊 由 $t=0$ 至∞積分,左邊 $=1/\mu\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^{n+1}\int_0^\infty R'(T/n)\,dT$

$$=1/\mu\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^{n+1}\int_0^\infty dR(T/n)$$

$$=1/\mu\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^{n+1}\left[R(T/n)\right]_0^\infty$$

$$=-1/\mu\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^{n+1}=-\rho/\mu\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^{n}$$

$$=-\rho/\mu\left[1+2\rho+3\rho^2+\cdots\cdots\right]$$

$$=-\rho/\mu\frac{d}{d\rho}\left[1+\rho+\rho^2+\cdots\cdots\right]$$

$$=-\rho/\mu\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}\rho^n=-\rho/\mu\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$=-\rho/\mu(1-\rho)^2$$

右邊 $=\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^{n+1}\int_0^\infty R(T/n-1)\,dT+\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n+2}(n+1)\int_0^\infty R(T/n+1)\,dT$

$$-(1+\rho)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^{n+1}\int_0^\infty R(T/n)\,dT$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^{n+2}\int_0^\infty R(T/n)\,dT+\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^{n+1}\int_0^\infty R(T/n)\,dT-$$

$$(1+\rho)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^{n+1}\int_0^\infty R(T/n)\,dT$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n+1}\int_0^\infty R(T/n)\,dT=-\frac{1}{1-\rho}W_q \text{〔由上述} W_q \text{※的定義〕}$$

因此 $-\rho/\mu(1-\rho)^2=[-1/(1-\rho)]W_q$, $W_q=\rho/\mu(1-\rho)$,故在此系統裡對每個人的平均等待時間 $W_s=W_q+\frac{1}{\mu}=\rho/\mu(1-\rho)+1/\mu=1/\mu(1-\rho)$,與(六)比較,(七)′ 所得的結論完全一樣。在此定義 $\boxed{\text{一般規則}}$;服務規則包

括隨機服務規律，先到先服務規律，不包括優先服務型。

(九)Poisson型來人，Poisson型服務（離開人），1個服務站，一般規則，在系統裡最大人數N（在等待行列中最多(N−1)）。與(六)的比較下，可得

$-\rho p_0 + p_1 = 0$ ，　　　$n = 0$

$-(1+\rho)p_n + p_{n+1} + \rho p_{n-1} = 0$ ，　　　$0 < n < N$

$-p_N + \rho p_{N-1} = 0$ ，$n = N$。〔在(六)，$\lambda p_{N-1} + \mu p_{N+1} - (\lambda+\mu)P_N = 0$ 式裡，考慮最大數N就可以〕

上述方程式可寫做　$(1+\rho)p_0 = p_1 + p_0$ ，　　$n = 0$

$(1+\rho)p_n = p_{n+1} + \rho p_{n-1}$ ，　　$0 < n < N$

$(1+\rho)p_N = \rho p_{N-1} + \rho p_N$ ，　　$n = N$

作Z變換，得 $(1+\rho)\sum_{n=0}^{N} Z^n p_n = \sum_{n=1}^{N-1} p_{n+1} Z^n + \rho \sum_{n=1}^{N} p_{n-1} Z^n + p_0 + \rho p_N Z^n$

因 $n > N$ 時　$p_n = 0$ ，化簡後，得

$(1+\rho)P(z) = 1/z\ \{P(z) - p_0\} + \rho z\ \{P(z) - p_N Z^N\} + p_0 + \rho p_N Z^n$

或　$P(z) = p_0(1/1-\rho z) - \rho p_N(z^{N+1}/1-\rho z)$，取逆Z變換，

$Z^{-1}\ \{p_0/1-\rho z\} = p_0\ \rho^n$ ，$n = 0, 1, 2, \cdots\cdots, N$ ，同理。

$$Z^{-1}\ \{\rho p_N(Z^{N+1}/1-\rho z)\} = \begin{cases} 0 & , n=0,1,2,\cdots,N \\ p_N \rho^{n-N} & , n=N+1, N+2, \cdots\cdots, \end{cases}$$

$$\text{應用}\begin{cases} Z^K Q \to p_n = \begin{cases} 0 & , n < k \\ q_{n-K} , & n \geqslant k \end{cases} \\ Z^{-1}\ \{Q(z)\} = q_n , \end{cases}$$

$$\text{綜合後}，\quad p_n = \begin{cases} p_0 \rho^n & n=0,1,2,\cdots\cdots,N \\ p_0 \rho^n - p_N \varphi^{n-N} & n=N+1, N+2, \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

又，由 $(p_0\rho^n - p_N\rho^{n-N}) = (p_0\rho^n - p_0\rho^N\rho^{n-N}) = 0$

$\therefore\quad p_n = p_0\rho^n$ ，$n = 0, 1, \cdots\cdots, N$

p_0 之值可由　$p_0 \sum_{n=0}^{N} \rho^n = p_0(1-\rho^{N+1}/1-\rho) = 1$ ，

或　$p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$ 得，$\therefore\quad p_n = (1-\rho/1-\rho^{N+1})\rho^n$ ，$n = 0, 1, 2, \cdots, N$

在此系統中的平均人數，$L_s = E\{n\} = \sum_{n=0}^{N} np_n = 1-\rho/(1-\rho^{N+1}) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$

$= (1-\rho/1-\rho^{N+1})\rho \dfrac{d}{d\rho}(1-\rho^{N+1}/1-\rho)$

$= \rho\ \{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\}/(1-\rho)(1-\rho^{N+1})$

(十)Poisson 型來人，Poisson 型服務（離開人），C個服務站（$C > 1$）同時可服務，全部服務站有同樣狀態的服務分配（指數分配），其參數是單位時間平均 μ 的服務率。與(六)比較，在短小時間 $h > 0$ 裡服務的機率 $\doteqdot \binom{n}{1}(\mu h)(1-\mu h)^{n-1} \cong n\mu h$ ，$n < c$

如　$n \geqslant c$　則服務的機率 $= c\mu h$　因此　可得

$$p_0(t+h)=1\cdot(1-\lambda h)p_0(t)+\mu h(1-\lambda h)p_1(t)\ ,\ n=0$$

$$p_n(t+h)=\lambda h[1-(n-1)\mu h]p_{n-1}(t)+(n+1)\mu h(1-\lambda h)p_{n+1}(t)$$

$$+(1-\lambda h)(1-n\mu h)p_n(t),\quad 0<n<c$$

$$p_c(t+h)=\lambda h[1-(c-1)\mu h]p_{c-1}(t)+(1-\lambda h)(c\mu h)p_{c+1}(t)$$

$$+(1-\lambda h)(1-c\mu h)p_c(t),\quad n=c$$

$$p_n(t+h)=\lambda h(1-c\mu h)p_{n-1}(t)+(1-\lambda h)(c\mu h)p_{n+1}(t)$$

$$+(1-\lambda h)(1-c\mu h)p_n(t),\quad n>c$$

取 $h\to 0$，可得 $p'_0(t)=\mu p_1(t)-\lambda p_0(t)\qquad n=0$

$$p'_n(t)=\lambda p_{n-1}(t)-(\lambda+n\mu)p_n(t)+(n+1)\mu p_{n+1}(t)\qquad 0<n<c$$

$$p'_n(t)=\lambda p_{n-1}(t)-(\lambda+c\mu)p_n(t)+c\mu p_{n+1}(t)\qquad n\geqslant c$$

當 $t\to\infty$時，可得穩定狀態方程式（與時間無關）

$$-\lambda p_0+\mu p_1=0\qquad n=0$$

$$\lambda p_{n-1}-(\lambda+n\mu)p_n+(n+1)\mu p_{n+1}=0\qquad 0<n<c$$

$$\lambda p_{n-1}-(\lambda+c\mu)p_n+c\mu p_{n+1}=0\qquad n\geqslant c$$

上述方程式，p_0，p_n 之解可由數學歸納法求得。

設 $n+1=k$，對 $0<n<c$，上述差分方程式可寫做

$$p_k=\frac{1}{k}\{(\rho+(k-1))p_{k-1}-\rho p_{k-2}\}\qquad 2\leqq k\leqq c\ ,$$

同理對 $n\geqslant c$，差分方程式寫做 $p_k=\dfrac{1}{c}\{(\rho+c)p_{k-1}-\rho p_{k-2}\}$，

$k\geqslant c+1$，

當 $n=0$，$p_1=\rho p_0$，代入 $k=2$ 於第一方程式，

故，$p_2=\dfrac{1}{2}\{(1+\rho)\rho p_0-\rho p_0\}=\dfrac{\rho^2}{2}p_0$

對第一方程式可得 $p_n=\rho_n/n!\ p_0\qquad 0\leqq n\leqq c$

再對第二方程式，$k=c+1$ 時，$p_{c+1}=\dfrac{1}{c}\{(\rho+c)p_c-\rho p_{c-1}\}$，

代入 p_c，p_{c-1} 得

$$p_{c+1}=p_c/c\{(\rho+c)\rho^c/c!-\rho^c/(c-1)!\}=\rho^{c+1}/c(c!)p_0\ ,$$

由歸納法得知 $p_n=\rho^n/(c^{n-c}c!)p_0\qquad n>c$，$p_0$之值由

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_n=(\sum\limits_{n=0}^{c}\rho^n/n!+\sum\limits_{n=c+1}^{\infty}\rho^n/c^{n-c}c!)p_0=1$，可求得，

$$\therefore\quad p_0=\{\sum_{n=0}^{c-1}\rho^n/n!+\rho^c/c!\sum_{n=c}^{\infty}\rho^{n-c}/c^{n-c}\}^{-1}$$

$$=\{\sum_{n=0}^{c-1}\rho^n/n!+\rho^c/c!\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{\rho}{c})^j\}^{-1}$$

$$=\{\sum_{n=0}^{c-1}\rho^n/n!+\rho^c/c!(1/1-\frac{\rho}{c})\}^{-1}\qquad 但\ \frac{\rho}{c}<1$$

$$L_q=\sum_{n=c}^{\infty}(n-c)p_n=\sum_{k=0}^{\infty}kp_{k+c}=\sum_{k=0}^{\infty}k\rho^{k+c}/c^kc!\ p_0$$

$$=p_0\ \rho^c/c!\ \ \rho/c\sum_{k=0}^{\infty}k(\frac{\rho}{c})^{k-1}$$

$$=p_0\frac{\rho^c}{c!}\frac{\rho}{c}[\frac{1}{(1-\frac{\rho}{c})^2}]=[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}]p_0$$

$$=(\frac{c\rho}{(c-\rho)^2})p_c$$

(十一) Poisson型客人，Poisson型服務，c個服務站，一般服務規則，在系統內最大人數N＞c，客人來源無限制，比照(九)的方法，可得下列方程式

$$\mu p_1 - \lambda p_0 = 0 \qquad n = 0$$

$$(n+1)\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} - (n\mu+\lambda)p_n = 0 \qquad 0 < n < c$$

$$c\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} - (c\mu+\lambda)p_n = 0 \qquad c \leqq n < N$$

$$\lambda p_{N-1} - c\mu p_N = 0 \qquad n = N$$

再與(九)的解比較，得 $p_n = \begin{cases} \rho^n / n!\ p_0 & 0 \leqq n \leqq c \\ \rho^n / (c!\,c^{n-c})\ p_0 & c \leqq n \leqq N \end{cases}$

但 $$p_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c+1}^{N} \frac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c\left(1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}\right)}{c!\left(1-\frac{\rho}{c}\right)} \right\}^{-1}$$

$\dfrac{\rho}{c}$不一定小於1

就是 p_n 之關係式與前節求法完全相同。兩者的差只在 p_0 之值。又

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{N} (n-c)p_n = \sum_{j=1}^{N-c} j p_{j+c} = p_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \sum_{j=1}^{N-c} j\left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-1}$$

$$= p_0 \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2} \left\{ 1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\frac{\rho}{c}\right) \right\}$$

又 $$L_q = \sum_{n=c+1}^{N} (n-c)p_n = \sum_{n=0}^{N} np_n - \sum_{n=0}^{c} np_n - c\left(1-\sum_{n=0}^{c} p_n\right)$$

$$= L_s - \left\{ c - \sum_{n=0}^{c} (c-n)p_n \right\} = L_s - (c-\bar{c}),$$

故 $L_s = L_q + (c-\bar{c})$

但 $\bar{c} = \sum_{n=0}^{c} (c-n)p_n$ ，在休息中無工作的工人的平均數。

(十二) Poisson 型客人，Poisson型服務，一般服務規則，服務站數無限制，例如自己服務型，系統內最大人數無限制，來源也無限制。

微分方程式的求法與(九)相同。要注意對全部的 $n \geqslant 0$，單一個人要離開的機率 $= n\mu h$， 故 $p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$， $n = 0$

$$p'_n(t) = -(\lambda+n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \quad n \geqslant 1,$$

穩定狀態（與時間無關）的差分方程式 如下，

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \qquad n = 0$$

$$-(\lambda+n\mu)p_n + \lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} = 0, \qquad n \geqslant 1$$

先求上面二式的解，應用Z變換的方法，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p'_n(t)Z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n\mu)p_n(t)Z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t)Z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1}(t)Z^n$$

如設 $P(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)Z^n$ ，上式寫做

$$\frac{\partial}{\partial t}P(z,t)=-\lambda P(z,t)-\mu z\frac{\partial}{\partial z}P(z,t)+\lambda zP(z,t)+\mu\frac{\partial}{\partial z}P(z,t)$$

整理後 $\frac{\partial}{\partial t}P(z,t)=\mu(1-z)\frac{\partial}{\partial z}P(z,t)-\lambda(1-z)P(z,t)$

當 $t\to\infty$，可知 $\lim_{t\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}P(z,t)=0$，並且 $p'_n(t)\to 0$ 表示 $p_n(t)\to p_n$，與時間無關。故 $P(z,t)$ 可寫做 $P(z)$。因此上式可寫做

$$\frac{d}{dz}P(z)=\rho P(z)$$

$\therefore$ $P(z)=ce^{\rho z}$，原始條件 $P(0)=p_0$，得 $P(z)=p_0e^{\rho z}$，穩定狀態的解，由 $Z^{-1}\{e^{\rho z}\}=\rho^n/n!$，

得 $p_n=p_0\frac{\rho^n}{n!}$， $n=0,1,2,\cdots\cdots$

兩邊對 n 相加，得 $p_0=\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\}^{-1}=e^{-\rho}$

$\therefore$ $p_n=\frac{e^{-\rho}\rho^n}{n!}$， $n=0,1,2,\cdots\cdots\cdots$，

ρ 不一定小於1，Poisson分配，$L_s=E\{n\}=\rho$。

(十三)Poisson 型客人，Poisson 型服務完成要離開，R 個服務站，一般服務規則，系統內最大客人數$=k$，$k>R$，客人來源只有 k 個，例如有 k 個機器破損後由 R 個修理工來服務。破損機器在修理間，除非別的機器再破損外，不能產生新的客人。在短小的時間 $h>0$ 內，單一服務的機率$=n\mu h$，如 $n\leqq R$；在短小的時間 $h>0$ 內，單一服務的機率$=R\mu h$ 如 $n\geqq R$。一方面，單一客人來的機率$=(k-n)\lambda h$，$n\leqq k$；λ 代表機器的破損率。因此與前述求法相同，可得，

$$p_0(t+h)=p_0(t)[1-k\lambda h]+p_1(t)\mu h\{1-(k-1)\lambda h\},\quad n=0$$

$$p_n(t+h)=p_n(t)\{1-(k-n)\lambda h\}(1-n\mu h)+p_{n-1}(t)\{(k-n+1)\lambda h\}\{1-(n-1)\mu h\}+p_{n+1}(t)\{1-(k-n-1)\lambda h\}\{(n+1)\mu h\}\quad 0<n<R$$

$$p_R(t+h)=p_R(t)\{1-(k-R)\lambda h\}\{1-R\mu h\}+p_{R+1}(t)\{1-[k-(R+1)]\lambda h\}\{R\mu h\}+p_{R-1}(t)\{[k-(R-1)]\lambda h\}\{1-(R-1)\mu h\}\quad n=R$$

$$p_n(t+h)=p_n(t)\{1-(k-n)\lambda h\}\{1-R\mu h\}+p_{n-1}\{(k-n+1)\lambda h\}\{1-R\mu h\}+p_{n+1}(t)\{1-(k-n-1)\lambda h\}(R\mu h)\quad R<n\leqq k-1$$

$$p_k(t+h)=p_k(t)(1-R\mu h)\cdot 1+p_{k-1}(t)\{\lambda h(1-R\mu h)\},\quad n=k$$

整理後，取 $h\to 0$，$t\to\infty$，可得

$$k\rho p_0=p_1\quad n=0$$

$$\{(k-n)\rho+n\}\,p_n=(k-n+1)\rho p_{n-1}+(n+1)p_{n+1} \qquad 0<n<R$$

$$\{(k-n)\rho+R\}\,p_n=(k-n+1)\rho p_{n-1}+Rp_{n+1} \qquad R\leqq n\leqq k-1$$

$$Rp_k=\rho p_{k-1} \qquad n=k$$

由第一式，$p_1=k\rho p_0$，在第二式代入 $n=1$，得 $2p_2=(k-1)\rho p_1$，

應用數學歸納法，$(n+1)p_{n+1}=(k-n)\rho p_n$，$0\leqq n<R$，

同法由下面二式可得　$Rp_{n+1}=(k-n)\rho p_n$　，$R\leqq n\leqq k$。

由此二式可知

$$p_n=\begin{cases}\binom{k}{n}\rho^n p_0, & 0\leqq n\leqq R\\ \binom{k}{n}\dfrac{n!\rho^n}{R!R^{n-R}}\,p_0, & R\leqq n\leqq k\end{cases}$$

但　$p_0=\left\{\sum_{n=0}^{R}\binom{k}{n}\rho^n+\sum_{n=R+1}^{k}\binom{k}{n}\dfrac{n!\rho^n}{R!R^{n-R}}\right\}^{-1}$

現在　$L_q=\sum_{n=R+1}^{k}(n-R)p_n=\sum_{n=0}^{k}(n-R)p_n-\sum_{n=0}^{R}(n-R)p_n$

$$=\sum_{n=0}^{k}np_n-\{R-\sum_{n=0}^{R}(R-n)p_n\}=L_s-(R-\overline{R})$$

但　$\overline{R}$＝休息無事的修理工的平均數＝$\sum_{n=0}^{R}(R-n)p_n$

上述可寫做　$L_s=L_q+(R-\overline{R})$

以上所討論的都是Poisson型，下一回要討論Non-Poisson 型。